11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve ona karşılık gelen öz vektörlerini bulunuz.

$$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left[(3-\lambda)\cdot(\lambda^2-4)\right] - (-\lambda-2) + (2+\lambda)$$

$$= \cancel{3\lambda^2} - 12 - \cancel{\lambda^3} + 4\lambda + \lambda + 2 + 2 + \lambda$$

$$= \underline{-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8} = 0$$

$$\underline{-\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda - 6) - 8 = 0}$$

$$-(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+4) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = -2 \end{array} \right\} \quad \sum \lambda_i = iz$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$\lambda_1 = 1$ için;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \hline -x_1 = x_2 = x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$'e karşılık gelen öz vektördür.

$\lambda_2 = 4$ için;
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_2 \end{array}$$

$x_2 = 1$ için;
$$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$ bulunur.

$\lambda_3 = -2$ için;
$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$ bulunur.

12.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$(-1)^{1+2}$

a) $\det(A) = ?$

b) Özdeğer ve özvektörleri bulunuz.

a) $|A| = [1 \cdot (-3)] + [-1 \cdot 1] + [2 \cdot (-1)] = \cancel{\quad}$
$= -3 - 1 + 2 = -2$

b) $|A - \lambda I| = 0$ olmalı.

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$|A - \lambda I| = \Big[(1-\lambda) \cdot \{(2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 1\}\Big] - 1 \cdot (1+\lambda) +$$

$-2 \cdot -1$

$$= -(\lambda+1) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$, $|A| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i$

$\lambda_3 = -1$ $\quad -2 = -2$

$\lambda_1 = 2$ için;

$x_3 = 1$ için; $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1$ için; $X_2 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = -1$ için; $X_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

a) $\det(A) = ?$

b) özdeğerler ve öz vektörleri bulunuz.

a) $|A| = 1$

b) $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$

$\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

14. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$x_1 - x_2 = 2$

$x_1 - x_3 = -1$

denklem sistemi için katsayılar matrisinin rankı ile birleştirilmiş matrisin rankını karşılaştırın ve denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(A) = 3$$

$$A, c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(A, c) = 3$$

$$\det(A) = 6$$

$$Ax = c \implies x = c.(A^{-1})'$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}'}_{(A^{-1})'} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7/6 \\ -5/6 \\ 13/6 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

14. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$x_1 - x_2 = 2$

$x_1 - x_3 = -1$

denklem sistemi için katsayılar matrisinin rankı ile birleştirilmiş matrisin rankını karşılaştırın ve denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(A) = 3$$

$$A,c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(A,c) = 3$$

$$\det(A) = 6$$

$$Ax = c \implies x = c.(A^{-1})'$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}'}_{(A^{-1})'} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7/6 \\ -5/6 \\ 13/6 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

3x3 boyutlu bir matrisin tersini bulmak için;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

örnekteki matris;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıdaki denklem kümesini matrisler yardımıyla çözünüz.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K.X = S$$

$$X = S.K^{-1}$$

$$K^{-1} \Rightarrow \text{Minör } K = \begin{bmatrix} -14 & -1 & 23 \\ 6 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cof } K = \begin{bmatrix} -14 & 1 & 23 \\ -6 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$K^{ek} = (\text{Cof } K)' = \begin{bmatrix} -14 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 23 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det K = -36$$

$$K^{-1} = \frac{1}{\det K} \cdot K^{ek} = \frac{1}{-36} \cdot \begin{bmatrix} -14 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 23 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14/36 & +6/36 & 2/36 \\ -1/36 & -3/36 & 5/36 \\ -23/36 & 3/36 & 7/36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = K^{-1} \cdot S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$ bulunur.

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -4$ olur.

15. $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$

$x_1 - x_2 - x_3 = -1$

$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$

lineer denklem sisteminin çözümü matrisin tersi özelliğini kullanarak bulunuz.

16. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6$

$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$

lineer denklem sisteminin çözümünü A^{-1} matrisi yardımıyla bulunuz.

17. $f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

fonksiyonlarına karşılık gelen 3x3'lük matrisleri oluşturunuz.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

18. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A nedir?

$(A^{-1})^{-1} = A$ olduğundan;

$A = \begin{bmatrix} 59 & -21 & 8 \\ -22 & 8 & -3 \\ 14 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde bulunur.

$|A| = 1$

19. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, BA çarpımını bulunuz.

20. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin pozitif tanımlı mı yarı pozitif tanımlı mı olduğuna karar veriniz.

$y'Ay > 0 \Rightarrow$ Pozitif Tanımlı

$y'Ay \geq 0 \Rightarrow$ Pozitif yarı tanımlı.